

Matemática I

Integral Definido

Engenharia de Telecomunicações e Informática

2021/2022

Teresa Araújo
Departamento de Matemática

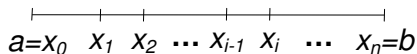
Seja $f(x)$ uma função de domínio D

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Vamos ver o que acontece se admitirmos que a variável x está definida no intervalo $[a, b]$, com $a < b$.

Partição

Seja $[a, b]$ um intervalo limitado e fechado em $\mathbb{R}$, com $a < b$.


$$a=x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_{i-1} \quad x_i \quad \dots \quad x_n=b$$

Chamamos **partição** do intervalo $[a, b]$ ao conjunto $\{x_i, i = 0, \dots, n\}$ tal que

$$x_{i-1} < x_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_0 = a$$

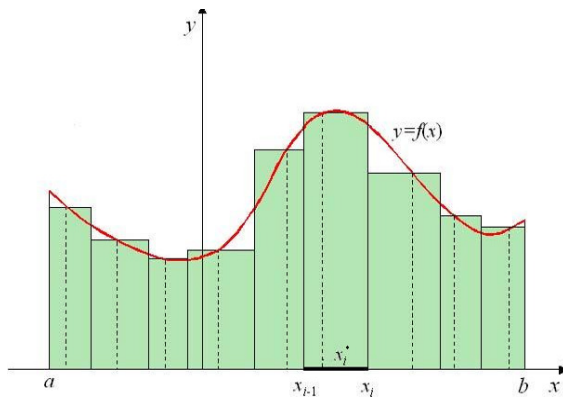
$$x_n = b$$

$$[a, b] = \bigcup_{i=0}^n [x_{i-1}, x_i]$$

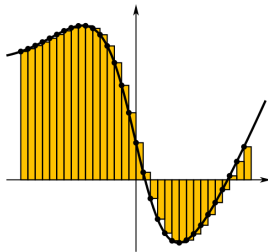
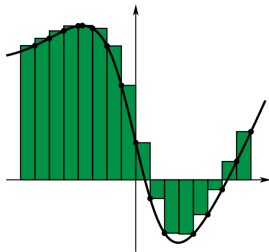
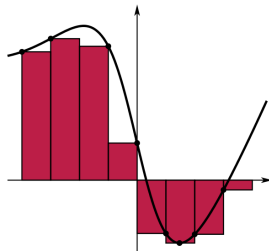
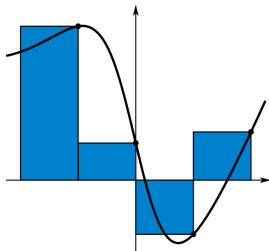
Integral Definido

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \qquad x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$



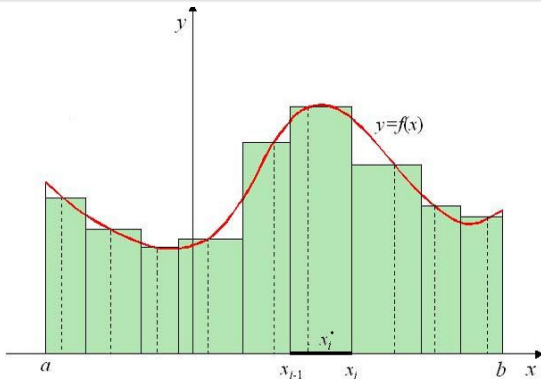
Integral Definido



Integral Definido

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$, com $a < b$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$



Teorema Fundamental do Cálculo Integral

Sejam f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e F a sua primitiva. Então

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad a < c < b$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq 0$$

$$f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

$$\frac{d}{dt} \left(\int_a^t f(x) dx \right) = f(t)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\int_t^b f(x) dx \right) = -f(t)$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & f(x) \text{ função par} \\ 0, & f(x) \text{ função ímpar} \end{cases}$$

Método da Decomposição

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^n f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k(x) dx \right)$$

Método de Integração por Partes

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = [F(x) g(x)]_a^b - \int_a^b F(x) g'(x) dx$$

com $F(x) = \int f(x) dx$

Métodos de Integração

Seja g uma função contínua, definida em $[a, b]$, cuja derivada g' é também contínua e que admite inversa g^{-1} .

$$x = g(t) \qquad dx = g'(t) dt \qquad \begin{cases} t_0 = g^{-1}(a) \\ t_1 = g^{-1}(b) \end{cases}$$

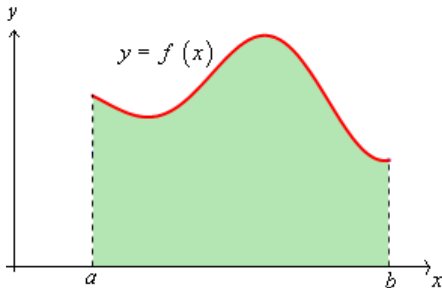
Método de Integração por Substituição

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{t_0}^{t_1} f(g(t)) g'(t) dt$$

Interpretação Geométrica

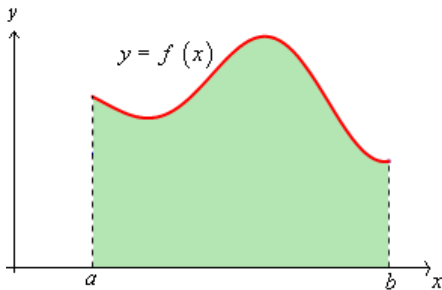
Se $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x) dx$ é numericamente igual ao valor da **área** da região limitada

- superiormente pela curva $y = f(x)$
- inferiormente pelo eixo OX
- lateralmente pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$



Cálculo de Áreas Planas

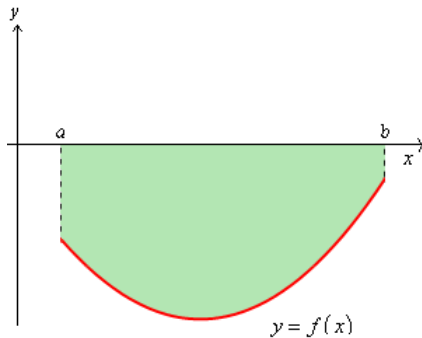
$$f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$$



$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Cálculo de Áreas Planas

$$f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$$

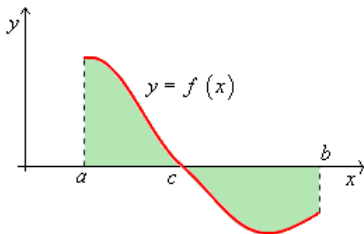


$$A = - \int_a^b f(x) dx$$

Cálculo de Áreas Planas

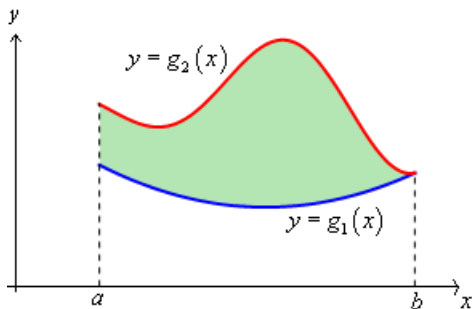
$$f(x) \geq 0, \forall x \in [a, c]$$

$$f(x) \leq 0, \forall x \in [c, b]$$



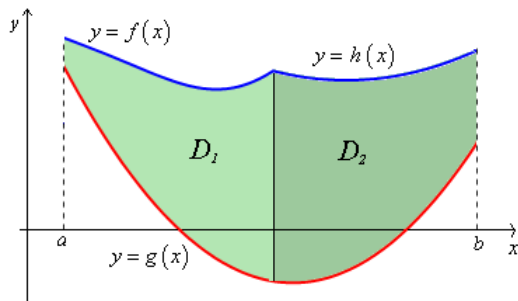
$$A = \int_a^c f(x) dx + \left(- \int_c^b f(x) dx \right)$$

Cálculo de Áreas Planas



$$A = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x)) \, dx$$

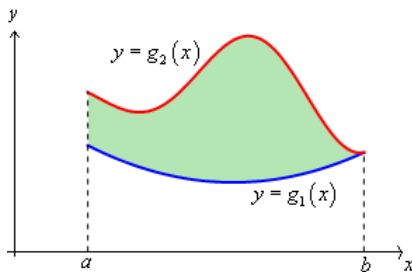
Cálculo de Áreas Planas



$$A = \int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^b (h(x) - g(x)) dx$$

Projectão no Eixo das Abscissas

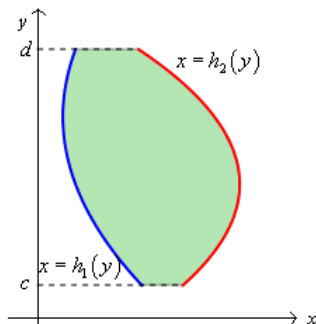
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$



$$A = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x)) \, dx$$

Projecção no Eixo das Ordenadas

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d \wedge h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$



$$A = \int_c^d (h_2(y) - h_1(y)) \, dy$$